РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

В своем знаменитом труде «Общая задача об устойчивости движения» [1] А.М.Ляпунов получил ряд основополагающих результатов и разработал эффективные методы исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений. Один из них сейчас называют первым методом Ляпунова, его суть – получение вывода об устойчивости положения равновесия по первым (линейным) членам разложения правой части в степенной ряд. Для доказательства своих теорем Ляпунов использовал метод последовательных приближений, представляя решения системы в виде рядов. Позднее были предложены и другие способы доказательства. Второй, или прямой метод Ляпунова используется в тех особых случаях, когда первое приближение не позволяет сделать вывод об устойчивости полной системы..

1. Устойчивость линейных систем. Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Как известно, частные решения системы (1) можно получить алгебраически, решая характеристическое уравнение

$$\det\|A - \lambda E_n\| = 0 \tag{2}$$

(E_n - единичная матрица соответствующего порядка) и полагая

$$x_k(t) = \exp(\lambda_k t) \tag{3}$$

причем мнимая экспонента раскладывается по формуле Эйлера

$$\exp(a + bi) = \exp(a)(\cos b + i \sin b)$$

Общее решение системы (1) – это сумма квазимногочленов, т.е. произведений частных решений (3) на многочлен, степень которого на единицу меньше кратности соответствующего корня:

$$x(t) = \sum P_k(t) \exp(\lambda_k t) \tag{4}$$

Определение. Положение равновесия $x = 0$ системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(0) = 0 \tag{5}$$

называется устойчивым (по Ляпунову), если всякое решение, стартующее из достаточно малой его окрестности U_δ, не покидает произвольно заданной окрестности U_ε, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x_0 = x(t_0) \in U_\delta, \forall t > t_0, x(t) \in U_\varepsilon$$

Понятие асимптотической устойчивости объединяет свойства устойчивости и притяжения. Последнее означает, что

$$\forall x_0 = x(t_0) \in U_\delta : \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

В случае линейной системы (1) притяжение достаточно для асимптотической устойчивости. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. 1) Если все корни уравнения (2) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости C (т.е. это – отрицательные действительные числа или мнимые числа с отрицательной действительной частью), то положение равновесия системы (1) асимптотически устойчиво. 2) Если хотя бы один из этих корней лежит в правой полуплоскости, то оно неустойчиво.

Доказательство. Для функции (3) утверждение следует из предельных свойств экспоненты. Для квазимногочлена (4) аналогичный вывод можно получить, применив правило Лопиталя-Бернулли.

Замечание. Для выяснения расположения корней алгебраического уравнения с действительными коэффициентами обычно используют критерий Рауса-Гурвица. При решении прикладных задач высокой размерности можно также решать характеристическое уравнение при помощи математических компьютерных пакетов.

Необходимое условие устойчивости. Если все корни алгебраического уравнения с действительными коэффициентами лежат в левой полуплоскости, то его коэффициенты имеют одинаковые знаки.

Критерий Рауса-Гурвица. Для того, чтобы все корни характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, a_0 > 0$$

имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы (составлена для случая $n = 4$ с ясным обобщением)

$$G=\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

были положительны.

Примеры.

1. Исследовать устойчивость системы

$$\ddddot{x}+6\dddot{x}+26\ddot{x}+46\dot{x}+65x=0$$

Составим характеристическое уравнение сопоставляя производным соответствующие степени переменной λ :

$$\lambda^4+6\lambda^3+26\lambda^2+46\lambda+65=0$$
$$\Rightarrow a_4=1, a_3=6, a_2=26, a_1=46, a_0=65$$

Составляем матрицу Гурвица и вычисляем ее угловые миноры:

$$G=\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 46 & 65 & 0 & 0 \\ 6 & 26 & 46 & 65 \\ 0 & 1 & 6 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Delta_1=46>0, \Delta_2=46*26-65*6=806>0, \Delta_3=\Delta_4=6\Delta_2-2116>0$$

Все миноры положительны, поэтому положение равновесия асимптотически устойчиво.

$$\ddddot{x}+3\dddot{x}-2\ddot{x}+4\dot{x}+2x=0$$

2. $\lambda^4+3\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda+2=0$

$$\Rightarrow a_4=1, a_3=3, a_2=-2, a_1=4, a_0=2$$

Далее,

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = -14 < 0$$

Второй минор оказался отрицательным, и можно сделать вывод о неустойчивости без дальнейших вычислений.

3. $\ddot{x} + \dot{x} + x - \alpha y = 0, \quad \ddot{y} + \dot{y} + y - \beta x = 0$

В принципе, данную систему несложно свести к уравнению четвертого порядка для одной из переменных, а затем строить матрицу Гурвица по аналогии с предыдущими примерами. Однако в этом нет необходимости: проще вычислить определитель второго порядка, строки которого соответствуют уравнениям, а столбцы – переменным (по-прежнему каждой производной отвечает умножение на λ):

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & -\alpha \\ -\beta & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая этот определитель, получаем

$$\left(\lambda^2 + \lambda + 1\right)^2 - \alpha\beta = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + (1 - \alpha\beta) = 0$$

Необходимое условие устойчивости дает $\alpha\beta < 1$.

Для матрицы Гурвица имеем выражение

$$G = \begin{pmatrix} 2 & \gamma & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & \gamma \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = 1 - \alpha\beta$$

$$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 6 - 2\gamma, \Delta_3 = \Delta_4 = 8 - 4\gamma$$

В итоге получаем область асимптотической устойчивости $\gamma \in (0,2) \Rightarrow |\alpha\beta| < 1$. Интересно проверить ситуацию на границе этой области. В случае $\alpha\beta = 1$ имеем $\lambda_1 = 0$, а если $\alpha\beta = -1$, то $\lambda_{1,2} = \pm i$. Оба этих случая относятся к числу критических (см. ниже).

2. Теоремы первого методаЛяпунова. Здесь речь идет о двух системах: нелинейной (5) и линейной (1), причем матрица A - это матрица Якоби для функции $f(x)$:

$$A = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1}^{n} \tag{6}$$

Устанавливается связь между устойчивостью двух систем. Важно различать разницу между двумя понятиями. Термин «устойчивость в первом приближении» означает лишь устойчивость линейной системы (1). Более сильное свойство «устойчивость по первому приближению» означает, что обе системы устойчивы либо обе неустойчивы.

Теорема 1. Если уравнение (2) имеет только корни с отрицательными вещественными частями, то положение равновесия системы (5) асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Если уравнение (2) имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то положение равновесия системы (5) неустойчиво.

Пример.
$$\begin{aligned} &\dot{x} = \sin\left(\alpha x + y^2\right) + \sqrt{4 - \arcsin 2y} - 2e^x \\ &\dot{y} = \operatorname{arctg}(x^3 + \beta y) + \ln(1+3x), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Исследовать устойчивость нулевого положения равновесия.

Разложим правые части по формуле Тейлора и отбросим в полученных выражениях нелинейные члены. В итоге получим линейную систему

$$\dot{x} = (\alpha - 2)x - y, \quad \dot{y} = 3x + \beta y$$

Для матрицы (6) получаем

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 2 & -1 \\ 3 & \beta \end{pmatrix} \tag{7}$$

Критерий асимптотической устойчивости: след матрицы (7) отрицателен, а ее детерминант положителен, т.е.

$$\alpha + \beta < 2, (\alpha - 2)\beta > -3$$

3. Особые случаи. Сформулированные в предыдущем разделе теоремы не охватывают всех возможностей: к особым случаям отнесем наличие корней характеристического уравнения с нулевой вещественной частью (нули или чисто мнимые пары). При этом линейная система (1) будет устойчивой (не асимптотически) либо неустойчива в зависимости от отсутствия или наличия в нормальной форме (9) жордановых клеток вида (12) или (13). Такие случаи называют особыми, или критическими, так как для них полная система (5) может быть и асимптотически устойчивой, и неустойчивой. Для решения используют следующие теоремы второго метода Ляпунова.

Теорема Ляпунова об устойчивости. Пусть существует функция $V(x) > 0, V(0) = 0$, непрерывно дифференцируемая в окрестности нуля, для которой

$$\frac{dV}{dt} = \left(\mathrm{grad} V,\, f\right) \leq 0 \qquad (8)$$

то положение равновесия системы (5) устойчиво.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Пусть существует функция $V(x) > 0, V(0) = 0$, непрерывно дифференцируемая в окрестности нуля, для которой

$$\frac{dV}{dt} = \left(\mathrm{grad} V,\, f\right) < 0 \qquad (9)$$

то положение равновесия системы (5) асимптотически устойчиво.

Теорема Четаева о неустойчивости. Пусть существует функция $V(0) = 0$ для которой область $V(x) > 0$ примыкает к началу координат и во всех точках этой области

$$\frac{dV}{dt} = \left(\mathrm{grad} V,\, f\right) > 0 \qquad (10)$$

то положение равновесия системы (5) неустойчиво.

Теорема Барбашина – Красовского. Если в условиях теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости неравенство (9) – нестрогое, причем множество точек фазового пространства, для которых $dV / dt = 0$, не содержит целых траекторий системы, за исключением изолированного положения равновесия, то последнее асимптотически устойчиво.

Примеры.

1. $\dot{x} = ax^2$, тогда $\lambda = 0$, причем линейная система $\dot{x} = 0$ устойчива. Несложно убедиться, что в случае $a > 0$ эта система первого порядка неустойчива, а в случае $a < 0$ - асимптотически устойчива.
2. Линейная система $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = 0$ неустойчива ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ с жордановой клеткой), т.к. общее решение $x_1 = C_2 t + C_1, x_2 = C_2$ возрастает в случае $C_2 \neq 0$ до бесконечности. Для стабилизации добавим нелинейные слагаемые:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3,\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^3$$

Функция

$$V = \frac{x_1^4 + 2x_2^2}{4} > 0, \quad \dot{V} = x_1^3\left(x_2 - x_1^3\right) + x_2\left(-x_2^3 - x_1^3\right) = -x_1^6 - x_2^4 < 0$$

удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.
3. В следующей системе

$$\dot{x}_1 = x_2 + ax_1^3,\ \dot{x}_2 = -x_1 + ax_2^3$$

корни характеристического уравнения для линейной части чисто мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Функция

$$V = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > 0, \quad \dot{V} = a\left(x_2^4 + x_1^4\right)$$

удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости в случае $a < 0$ и условиям теоремы Четаева о неустойчивости в случае $a > 0$.

Важно отметить, что критические случаи не следует рассматривать как некое исключение: в реальных системах, включающих некоторые конструкционные параметры, они часто возникают при изменении этих параметров, что кроме того, в консервативных и обобщенно-консервативных механических системах асимптотическая устойчивость невозможна, а устойчивость по Ляпунову возможна лишь в критических случаях.

4. Построение функций Ляпунова. В отличие от общего случая, когда для вывода об устойчивости достаточно рассмотреть линейное приближение, универсального алгоритма построения функции Ляпунова V в критических случаях не существует, и можно дать лишь некоторые рекомендации.

Для системы (5) в критическом случае прежде всего можно попытаться построить подобрать V в виде квадратичной формы. Как правило, этого достаточно для решения учебных задач.

Примеры.

1. $$\begin{aligned}\dot{x} &= -ay - x\left[x^{2020} + y^{2020}\right],\\ \dot{y} &= ax - y\left[x^{2020} + y^{2020}\right]\end{aligned}$$

Здесь линеаризованная система описывает гармонические колебания, корни характеристического уравнения чисто мнимые. Положим $V = x^2 + y^2 > 0$, тогда

$$\begin{aligned}V &= 2x\left(-ay - x\left[x^{2020} + y^{2020}\right]\right) + 2y\left(ax - y\left[x^{2020} + y^{2020}\right]\right) =\\ &= -2(x^2 + y^2)\left[x^{2020} + y^{2020}\right] < 0\end{aligned}$$

Таким образом, выполнены условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

2. $\dot{x} = 2xy,\ \dot{y} = x^2 + 2y^2$

В данной задаче линейных членов нет, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Пусть $V = ax^2 + bxy + cy^2$, тогда

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (2ax + by)2xy + (bx + 2cy)(x^2 + 2y^2) =\\ &= bx^3 + 2(c + 2a)x^2y + 4bxy^2 + 4cy^3\end{aligned}$$

Данная форма третьего порядка знакопеременна, что служит предпосылкой для применения теоремы Четаева. Положим $b = 0$, тогда

$$\dot{V} = 2(c + 2a)x^2y + 4cy^3 = 2y\left(2cy^2 + (c + 2a)x^2\right)$$

Если взять $a = -1, c = 3,$ то второй сомножитель в этом выражении будет положительным. Сама функция $V = -x^2 + 3y^2$ положительна в области $y > |x|/\sqrt{3}$, что позволяет сделать вывод о неустойчивости. К такому же заключению приводит рассмотрение функции $V = xy$, положительной в первом квадранте, так как при этом $\dot{V} = x(x^2 + 4y^2) > 0$.

3. $$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y + \kappa x^3 \\ \dot{y} &= x - y + \kappa y^3, \quad \kappa \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Здесь один из корней характеристического уравнения линеаризованной системы равен нулю, второй отрицателен. Следовательно, в зависимости от нелинейных членов может иметь место как неустойчивость, так и асимптотическая устойчивость. Положим

$$V = ax^2 + bxy + cy^2 \Rightarrow \dot{V} = (2ax + by)\left(-x + y + \kappa x^3\right) + (bx + 2cy)\left(x - y + \kappa y^3\right) =$$
$$(x - y)\left(-(2a + b)x + (2c + b)y\right) + \kappa(2ax + by)x^3 + \kappa(bx + 2cy)y^3$$

Квадратичная часть $\dot{V}$ в общем случае знакопеременна, но если $a = c$, то

$$\dot{V} = -(2a + b)(x - y)^2 + \kappa(2ax + by)x^3 + \kappa(bx + 2ay)y^3$$

т.е. она знакопостоянна. Условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости можно удовлетворить в случае $k < 0$, полагая $a = c = 1, b = 0$.
В случае $k > 0$ положим $a = c = 1, b = -2$, тогда $V = (x - y)^2 \geq 0$,
$\dot{V} = 2\kappa(x - y)x^3 + 2\kappa(-x + y)y^3 = 2\kappa V(x^2 + xy + y^2)$, и выполнены условия теоремы Четаева о неустойчивости.

Пример 4. $$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 - y^3 + xy^3 \\ \dot{y} &= x^3 - y^3 - x^4 \end{aligned}$$

Доказать асимптотическую устойчивость.
В данной системе линейные члены в правой части отсутствуют. Будем строить функцию Ляпунова в виде однородной $V = V_2 + V_3 + \ldots + V_k + \ldots$, где V_k - однородная форма соответствующего порядка. Изучим поочередно производные этих форм в силу уравнений движения.

$$V_2 = ax^2 + bxy + cy^2 \Rightarrow \dot{V}_2 = (2ax + by)\left(-x^3 - y^3 + xy^3\right) + (bx + 2cy)\left(x^3 - y^3 - x^4\right) =$$
$$(b - 2a)x^4 + (2c - b)x^3y - (b + 2a)xy^3 - (b + 2c)y^4 + \ldots =$$
$$x^4\left((b - 2a) + (2c - b)z - (b + 2a)z^3 - (b + 2c)z^4\right) + \ldots, \quad z = y / x$$

Анализ знака полученного выражения далеко не прост. Может помочь компьютер: полагая a=1,b=0, строим график f(z) для различных c>0. Получаем, что при c=1.1 выполнены условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, причем члены четвертого порядка в уравнениях движения не играют роли.
С другой стороны, имеется более простое решение: полагаем $V_2 \equiv 0$, тогда V_3 не может быть знакоопределенной, и надо считать $V_3 \equiv 0$. Для следующей формы можно взять простейшее выражение $V_4 = x^4 + y^4 > 0$. При этом
$\dot{V}_4 = 4x^3\left(-x^3 - y^3 + xy^3\right) + 4y^3\left(x^3 - y^3 - x^4\right) = -4(x^6 + y^6) < 0$
Т.е. условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости выполнены. Заметим, что здесь члены седьмого порядка взаимно уничтожились благодаря специальному выбору членов четвертого порядка в исходной системе. На самом деле, вывод об асимптотической устойчивости вовсе от них не зависит.

В некоторых задачах вид функции Ляпунова подбирается исходя из особенностей данной задачи.
Пример 5. $\dot{x} = y,\ \dot{y} = -y^3 - x(y^2 + 1)$
В линейном приближении имеем пару чисто мнимых корней (устойчивость неасимптотическая). Умножим первое уравнение на x, второе – на $y/(1+y^2)$ и сложим. В итоге получим

$$\frac{d}{dt}\left(x^2 + \ln(1+y^2)\right) = -\frac{2y^4}{1+y^2}$$

Выражение под знаком производной положительно; примем его за функцию Ляпунова. Правая часть отрицательна вне множества $y = 0$, на котором она обращается в нуль. Если подставить это значение в исходную систему, то получим $\dot{x} = 0,\ 0 = -x$, что означает $x \equiv 0$. Асимптотическая устойчивость следует из теоремы Барбашина – Красовского.

5. Устойчивость в механических системах. В отличие от задач предыдущего радела, в которых правые части формировались искусственно для иллюстрации основных теорем, уравнения механики имеют определенную структуру: они имеют лагранжеву форму

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad L = T - \Pi,\ j = 1,\dots,n \tag{11}$$

где Т и П – кинетическая и потенциальная энергия. В консервативной системе Т – положительно определенная квадратичная форма от обобщенных скоростей (коэффициенты могут зависеть от координат, но не от времени), П=П(q). Положения равновесия $q = q^0, \dot{q}^0 = 0$ системы (11) определяются критическими точками потенциальной энергии, т.е. $d\Pi(q^0) = 0$.
Классический результат – теорема Лагранжа:

Если точка $q = q^0$ *- строгий локальный минимум потенциальной энергии, то она определяет устойчивое положение равновесия.*

Заметим, что, по существу, здесь речь идет об устойчивости в смысле Ляпунова, хотя во времена Лагранжа такого понятия еще не было. Кроме того, здесь устойчивость не может быть асимптотической ввиду наличия в консервативной системе интеграла энергии. Один из вариантов обратного утверждения – следующая теорема Ляпунова.

Если в положении равновесия потенциальная энергия не имеет минимума, и это определяется из анализа $d^2\Pi(q^0)$, то. имеет мести неустойчивость.

Таким образом, задача об устойчивости консервативных систем сводится к задаче на экстремум функции нескольких переменных.

Примеры.

Задача существенно усложняется при исследовании устойчивости в неинерциальной системе отсчета: при этом к имеющимся в системе потенциальным силам добавляются силы инерции – переносные и кориолисовы. Этим силам соответствуют обобщенные силы Q_j в правых частях системы (5.1). Мощностью непотенциальных сил называют величину

$$N = \sum_{j=1}^{n} Q_j \dot{q}_j$$

Силы называют гироскопическими, если $N \equiv 0$, диссипативными, если $N \leq 0$ и с полной диссипацией, если $N < 0$. для исследования можно воспользоваться теоремами Томсона-Тета-Четаева:

1. Если выполнено условие теоремы Лагранжа и на систему дополнительно действуют произвольные гироскопические и диссипативные силы, то положение равновесия останется устойчивым.

К тому же, если диссипация полная, то устойчивость будет асимптотической.

2. Если квадратичная форма $d^2\Pi(q^0)$ невырождена и имеет нечетное число отрицательных собственных значений, то положение равновесия неустойчиво при добавлении любых гироскопических и диссипативных сил.
3. Если квадратичная форма $d^2\Pi(q^0)$ невырождена и имеет четное число отрицательных собственных значений, то положение равновесия может стать устойчивым при добавлении гироскопических сил (гиростабилизация). Такая устойчивость разрушается при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией.

Заметим, что гиростабилизация возможна не всегда. Кроме того, она означает лишь отсутствие экспоненциальной неустойчивости. Для получения строгих выводов об устойчивости в случае 3 можно использовать теорему Арнольда-Мозера (см. [4]). В применении к лагранжевой системе с двумя степенями свободы устойчивость в линейном приближении гарантирует устойчивость для почти всех значений параметров.

Наиболее распространены задачи на относительной равновесие во вращающейся системе отсчета. При этом кориолисовы силы будут гироскопическими, а переносные (центробежные) - потенциальными.

Пример. Рассмотрим движение тяжелой частицы единичной массы на гладкой поверхности, вращающейся как твердое вокруг фиксированной вертикали OZ с постоянной угловой скоростью ω. Введем системы координат: связанную $OXYZ$ и неподвижную $OX'Y'Z$ с началом на поверхности. Положение частицы опишем ее относительными координатами x, y. Пусть $z = f(x, y)$ - уравнение поверхности, тогда для функции Лагранжа имеем выражение

$$L = T - gf(x,y), \quad T = \frac{1}{2}\Big(\left(\dot{x} - \omega y\right)^2 + \left(\dot{y} + \omega x\right)^2 + u^2\Big), \quad u = f_x\dot{x} + f_y\dot{y}$$

Уравнения движения в отсутствие сил сопротивления таковы:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} - \omega\dot{y} + \frac{d\left(uf_x\right)}{dt} - \omega\left(\dot{y} + \omega x\right) - u\left(f_{xx}\dot{x} + f_{xy}\dot{y}\right) + gf_x = 0 \\
&\ddot{y} + \omega\dot{x} + \frac{d\left(uf_y\right)}{dt} + \omega\left(\dot{x} - \omega y\right) - u\left(f_{xy}\dot{x} + f_{yy}\dot{y}\right) + gf_y = 0
\end{aligned} \qquad (12)$$

В частном случае $f(x, y) \equiv 0$ эти уравнения описывают относительное движение частицы на вращающейся плоскости, при этом траектория в системе $OX'Y'Z$ прямолинейна, а в системе $OXYZ$ имеет форму спирали. Такое искривление вызвано силами инерции. Последние описываются слагаемыми, пропорциональными ω^2 в системе (12) (переносные силы инерции), а также пропорциональными ω (силы Кориолиса).

Будем считать, что начало координат – критическая точка поверхности, т.е. $df(0,0)=0$. В линейном приближении в системе (12) исчезают члены, содержащие величину u. Второй дифференциал $d^2 f(0,0)$ представляет собой квадратичную форму; без ограничения общности можно считать, что в выбранных осях она имеет канонический вид $d^2 f(0,0)=\alpha dx^2+\beta dy^2$ (т.е. α и β – главные кривизны). Линеаризованная система для (12) примет вид

$$\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2 x+\alpha g x=0,\quad \ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2 y+\beta g y=0$$

Характеристическое уравнение

$$\det\begin{Vmatrix}\lambda^2-\omega^2+\alpha g & -2\omega\lambda \\ 2\omega\lambda & \lambda^2-\omega^2+\beta g\end{Vmatrix}=$$
$$=\rho^2-\rho\left(\alpha g+\beta g+2\omega^2\right)+\left(\alpha g-\omega^2\right)\left(\beta g-\omega^2\right)=0,\quad \rho=-\lambda^2$$

Данное квадратное уравнение имеет корни $\rho_{1,2}>0 \Leftrightarrow$

$$\begin{gathered}\left(\alpha+\beta\right)g+2\omega^2>0,\ \left(\alpha g-\omega^2\right)\left(\beta g-\omega^2\right)>0,\\ D=\left(\alpha-\beta\right)^2 g^2+8\omega^2 g(\alpha+\beta)>0\end{gathered}\qquad (13)$$

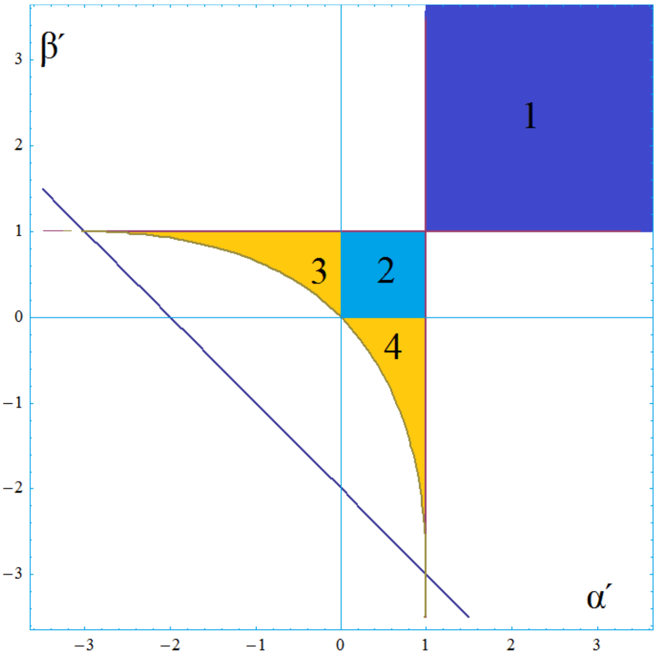
Введя безразмерные параметры $\alpha'=\alpha g/\omega^2, \beta'=\beta g/\omega^2$, представим условия (13) в виде

$$\begin{gathered}\alpha'+\beta'+2>0, \left(\alpha'-1\right)\left(\beta'-1\right)>0,\\ \left(\alpha'-\beta'\right)^2+8(\alpha'+\beta')>0\end{gathered}\qquad (14)$$

Область (14) на плоскости (α', β') ограничена тремя прямыми и параболой (Фиг.1): она состоит из квадранта $\alpha'>1, \beta'>1$ и криволинейного треугольника. При этом граница области 1 соответствует наличию у характеристического уравнения нулевого корня, а параболический участок границы областей 3 и 4 – кратным корням. Первое неравенство (14) следует из остальных.

Заметим, что в случае $\alpha = \beta > 0$ (параболоид вращения) равновесие устойчиво для любой скорости вращения за исключением единственной критической точки $\alpha = \omega$. Для эллиптического параболоида имеются области неустойчивости, в которых $(\omega - \alpha)(\omega - \beta) < 0$, на фигуре 1 им соответствуют незаштрихованные бесконечные прямоугольники в первой четверти. Для значений параметров в области 1 равновесие устойчиво по теореме Лагранжа. В области 2 (эллиптический параболоид) линеаризованная система устойчива, а для исследования полной (нелинейной) системы можно также воспользоваться теорией: если неустойчивость и имеет место, то лишь для множества параметров нулевой меры.

Области 3 и 4 соответствуют седловой поверхности. В этом случае неустойчивое положение может быть стабилизировано в линейном приближении за счет вращения, а строгий вывод об устойчивости также можно на основе теоремы Арнольда-Мозера. Заметим, что в отсутствие вращения форма $d^2\Pi(q^0)$ имеет одно отрицательное собственное значение, что свидетельствует о невозможности гиростабилизации. На самом деле, при вращении добавляются не только гироскопические силы, но потенциальные (переносные силы инерции), что увеличивает степень неустойчивости до двух (т.е. четного числа).



Фиг.1

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. // Собр. Соч. Т.2. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7-263.
2. Сб.задач по аналитической механике //Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. М.: Физматлит, 2002
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999.
4. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978
5. https://mipt.ru/education/chair/theoretical_mechanics/f_booklets/